

Tentamen Quantum Fysica II, 30 juni

Opgave 1

Een deeltje beweegt in een sferisch symmetrische potentiaal. Zijn golf functie heeft de vorm:

$$\phi(x, y, z) = C (\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2) f(|\vec{r}|) \quad (\alpha, \beta, \gamma \text{ constanten; } C \text{ normering})$$

Neem $\alpha = \beta = \gamma = 1$

- a) Welke waarden van \vec{L}^2, L_x, L_y, L_z kunnen bij meting gevonden worden en wat is de waarschijnlijkheid voor elk van deze waarden?

Neem nu $\alpha = 0, \beta = \gamma = 1$

- b) Schrijf de operator L_z met behulp van poolcoördinaten in de vorm: $L_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi}$

- c) Welke waarden van L_z kunnen bij meting gevonden worden en wat is de waarschijnlijkheid voor elk van deze waarden?

- d) Welke waarden van L_x kunnen bij meting gevonden worden en wat is de waarschijnlijkheid voor elk van deze waarden?

Gebruik: $Y_{0,0}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$ $Y_{2,2}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} e^{2i\varphi} \sin^2\theta$

$Y_{2,1}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{5}{8\pi}} e^{i\varphi} \sin\theta \cos\theta$ $Y_{2,0}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3\cos^2\theta - 1)$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi d\varphi \sin\theta d\theta Y_{\ell', m'}^*(\theta, \varphi) Y_{\ell, m}(\theta, \varphi) = \delta_{\ell, \ell'} \delta_{m, m'}$$

Opgave 2

Beschouw de Hamiltoniaan $H = H_0 + H_1$, waarbij H_1 als storing opgevat kan worden. De eigenwaarden en eigentoestand van H_0 zijn:

$E_n^{(0)}$ en $|n\rangle$ respectievelijk. $E_0 = E_0^{(0)} + E_0^{(1)}$ $E_0^{(1)} = \langle 0 | H_1 | 0 \rangle$

- a) Leid af dat in eerste-orde verstoring

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \text{ en } H_1 = C x^4$$

- b) We nemen nu $E_0^{(1)} = 0$

Bepaal E_0 .

$H_1 = \mathcal{C}x^3$ en H_0 onveranderd er geldt:

$$\langle x | 0 \rangle = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi} \right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \quad \text{en genormeerd}$$

Gebruik: 1) $\int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-ax^2} dx = \frac{n!}{2a^{n+1}}$

2) $\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{(2a)^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

Opgave 3

a) \vec{n} is een willekeurige eenheidsvector. Laat zien dat:

$$\vec{n} \cdot \vec{\sigma} = \begin{bmatrix} n_z & n_x - in_y \\ n_x + in_y & -n_z \end{bmatrix}, \quad \text{waarbij } \vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) \text{ de Pauli spin-matrices voorstellen.}$$

b) Verifieer $(\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^2 = 1$

c) De meest algemene spin-golffunctie voor een deeltje met spin = $\frac{1}{2}\hbar$ is een superpositie van de eigenfuncties van L_z met eigenwaarden $\pm \frac{1}{2}\hbar$. Verklaar.

d) Bepaal de twee eigenwaarden van de operator $A = e^{i\theta \vec{n} \cdot \vec{\sigma}}$

e) Bepaal de bij deze eigenwaarden behorende eigenfuncties in spinorvorm (d.w.z. als 2-dim kolom matrix)

f) Bewijs dat A een unitaire operator is (d.w.z. $AA^\dagger = A^\dagger A = I$) en geschreven kan worden als:

$$A = \cos\theta \cdot I + i \sin\theta (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \quad \text{waarbij } I \text{ de } 2 \times 2 \text{ eenheidsmatrix voorstelt.}$$

Opgave 4

Beschouw een systeem bestaande uit twee identieke fermionen. Het ruimtelijk deel van de golffunctie voor ieder fermion afzonderlijk is een Gauss-verdeling gecentreerd rond $x=a$ respectievelijk $x=-a$:

$$\psi_1(x) = \frac{M^{1/2}}{\pi^{1/4}} e^{-\mu^2(x-a)^2/2} \quad \text{en} \quad \psi_2(x) = \frac{M^{1/2}}{\pi^{1/4}} e^{-\mu^2(x+a)^2/2}$$

bepaal de normalisatie constante.

$$\text{Hint: } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Het spindeel van de golffunctie van de twee fermionen is symmetrisch ($L_1 = L_2$)

b) Bepaal de correct genormeerde ruimtelijke golffunctie van het systeem.

c) Hoe groot moet l zijn opdat de effecten van het Pauli-principe kleiner dan 10^{-3} .

Het spindeel van de golffunctie van de twee fermionen is symmetrisch ($L_1 = -L_2$)

d) Bepaal de correct genormeerde ruimtelijke golffunctie van het systeem.

e) Bepaal de waarschijnlijkheidsverdeling $P(x)$ voor de afstand tussen beide deeltjes $x = x_1 - x_2$ voor de in onderdeel b) en d) bepaalde golffuncties.

Geef aan wat de verschillen tussen beide waarschijnlijkheidsverdelingen zijn en wat daarvan de fysische achtergrond is.

$$\text{Hint: Ga over op de variabelen } x = x_1 - x_2 \text{ en } X = \frac{x_1 + x_2}{2}$$